קורס תורת הקבוצות – סתיו תשס״ה

תוספת ב׳: על קבוצות סופיות

למה. תהי F פונקציה חח״ע ו- $C \subseteq A \subseteq \operatorname{Dom} F$ אז $F[A \setminus C] = F[A] \setminus F[C]$.

הוכחה: הכוון האחד: יהי $y \in F[A \setminus C]$, אז קיים $x \in A \setminus C$ כך ש- $y = F(x)$. מכיוון ש- $x \in A$ $y \in F[A]$. נראה כי $y \notin F[C]$, וכתוצאה מכך $y \in F[A] \setminus F[C]$, כנדרש. אילו היה $y \in F[C]$ יהי קיים $z \in C$ כך ש- $F(x) = y = F(z)$, ומכיוון ש-F חח״ע היה $x = z$ וזה לא יתכן, כי מכיוון ש- $x \in A \setminus C$ $x \notin C$ בעוד $z \in C$.

הכוון השני: יהי $y \in F[A] \setminus F[C]$, ואז $y \in F[A]$ וקיים $x \in A$ כך ש- $y = F(x)$. $x \notin C$, כי אילו היה $x \in C$ היה $y = F(x) \in F[C]$, וזה בסתירה לכך ש- $y \in F[A] \setminus F[C]$. כך $x \in A \setminus C$ ו- $y = F(x) \in F[A \setminus C]$.

משפט. יהיו $c \notin A$ ו- $d \notin B$ ו- $A \cup \{c\} \approx B \cup \{d\}$ אז $A \approx B$.

הוכחה: לפי הנתון קיימת פונקציה $F : A \cup \{c\} \to B \cup \{d\}$ שהיא חח״ע ועל $B \cup \{d\}$. נפריד בין שני מקרים.

מקרה א׳: $F[c] = d$. במקרה זה קיים, לפי הלמה,

$\operatorname{Range}(F \restriction A) = F[A] = F[(A \cup \{c\}) \setminus \{c\}] = F[A \cup \{c\}] \setminus \{F[\{c\}] = (B \cup \{d\}) \setminus \{d\} = B$.

$F \restriction A$ הנה הגבלה של F, ומכיוון ש-F חח״ע גם $F \restriction A$ חח״ע. ראינו כי $F \restriction A$ מעתיקה את A על B ולכן $A \approx B$.

מקרה ב׳: $F(c) \neq d$. במקרה זה $c \neq F^{-1}(d)$ וקיים, לפי הלמה

$$\operatorname{Range}(F \restriction (A \setminus \{F^{-1}(d)\}) = F[A \setminus \{F^{-1}(d)\}] = F[(A \cup \{c\}) \setminus \{c, F^{-1}(d)\}]$$
$$= F[A \cup \{c\}] \setminus F[\{c, F^{-1}(d)\}] = (B \cup \{d\}) \setminus \{F(c), d\} = B \setminus \{F(c)\}$$

נסמן ב-G את הפונקציה $F \restriction (A \setminus \{F^{-1}(d)\}) \cup \{\langle F^{-1}(d), F(c)\rangle\}$, ואז

$$\operatorname{Dom} G = \operatorname{Dom}(F \restriction (A \setminus \{F^{-1}(d)\}) \cup \operatorname{Dom}\{\langle F^{-1}(d), F(c)\rangle\} = (A \setminus \{F^{-1}(d)\}) \cup \{F^{-1}(d)\} = A$$
$$\operatorname{Range} G = \operatorname{Range}(F \restriction (A \setminus \{F^{-1}(d)\}) \cup \operatorname{Range}\{\langle F^{-1}(d), F(c)\rangle\} = (B \setminus \{F(c)\}) \cup \{F(c)\} = B.$$

G היא פונקציה כי היא אחוד של שתי פונקציות בעלות תחומים זרים. $F \restriction (A \setminus \{F^{-1}(d)\})$ חח״ע כי היא הגבלה של הפונקציה החח״ע F. G חח״ע כי היא אחוד של שתי פונקציות חח״ע בעלות טווחים זרים. כך G היא העתקה חח״ע של A על B וקיים $A \approx B$.

משפט. אם $b \notin A$ ו- $A \cup \{b\}$ קבוצה בת $n+1$ איברים אז A קבוצה בת n איברים.

הוכחה: לפי הנתון $A \cup \{b\} \approx N_{n+1} = N_n \cup \{n\}$. מכיוון ש- $n \notin N_n$, לכן, לפי המשפט הקודם $A \approx N_n$, כלומר A היא בת n איברים.

משפט. קבוצה סופית אינה שוות עוצמה לקבוצה חלקית ממש שלה.

הוכחה. נוכיח כי לכל מספר טבעי n קבוצה בת n איברים אינה שוות עוצמה לקבוצה חלקית ממש שלה, וזאת באינדוקציה על n. קבוצה בת 0 איברים אינה שוות עוצמה לקבוצה חלקית ממש שלה כי היא ריקה ואין לה קבוצות חלקיות ממש. נניח, כהנחת אינדוקציה, שהטענה נכונה ל-n, ונוכיח אותה ל-$n+1$. תהי A קבוצה בת $n+1$ איברים ונניח כי F היא העתקה חח״ע של A על קבוצה B חלקית ממש שלה. מכיוון ש-B חלקית ממש ל-A קיים $x \in A \setminus B$. $A = (A \setminus \{x\}) \cup \{x\}$, לכן, לפי המשפט הקודם, $A \setminus \{x\}$ היא קבוצה בת n איברים. נסמן את $A \setminus \{x\}$ ב-C. נראה עתה כי $F[C]$ חלקית ממש ל-C, ולכן $F \restriction C$ היא העתקה חח״ע של C לקבוצה חלקית ממש שלה, ומכיוון ש- C היא בת n איברים זאת סתירה להנחת האינדוקציה. $F[C] \subseteq F[A] = B \subseteq A \setminus \{x\} = C$, וכך F מעתיקה את C לתת קבוצה שלה. $F(x) \in B \subseteq C$, ולכן $F(x) \in C$. לפי הלמה, מכיוון ש-F חח״ע קיים $F[C] = F[A \setminus \{x\}] = F[A] \setminus \{F(x)\}$ וכך $F(x) \notin F[C]$ ו-$F[C]$ היא קבוצה חלקית ממש ל-C.